УДК 519

РЕШЕНИЕ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ В ЗАДАЧАХ ПЕРЕНОСА ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ПРИМЕСЕЙ ПРИБЛИЖЕНИЕМ ГАУССА

Дуйсебекова К.С., Тайжуманова Ж.А.

ГОУ ВПО «Казахский национальный университет имени аль-Фараби», Алматы, e-mail: dkulan1@mail.ru, janna260991@mail.ru

Проведен анализ решения полуэмпирического решения турбулентной диффузии в задачах переноса загрязняющих примесей приближением Гаусса. Предполагается, что имеется определенный населенный промышленный пункт, в котором имеется один или несколько источников загрязнения, расположение которых определяется по координатам *x, y, z*. Для расчета средних концентраций примесей от точечного источника применено решение полуэмпирического уравнения гауссовой функцией распределения примеси, полученное методом функции Грина. Далее проводится нормировка основных параметров задачи, определены исходные данные. С помощью полученного уравнения составлена модель оценки количества аэрозольных загрязняющих веществ, поступающих от источника с конечной и непрерывной длительностью действия. Таким образом, рассмотренная расчетно-аналитическая модель методики оценки концентрации примесей применима к прикладным задачам оперативного контроля экологического состояния промышленного региона.

Ключевые слова: концентрация примесей, функция Гаусса, уравнение турбулентной диффузии

THE SOLUTION OF THE TURBULENT DIFFUSION SEMI-EMPIRICAL EQUATION IN PROBLEMS OF POLLUTING IMPURITY TRANSFER BY GAUSS APPROACH

Duysebekova K.S., Tayzhumanova Z.A.

Kazakh National University n.a. Al-Farabi, Almaty, e-mail: dkulan1@mail.ru, janna260991@mail.ru

The analysis of the solution the semi-empirical solution of turbulent diffusion in problems of transfer polluting impurity is carried out by Gauss approach. It is supposed that there is a certain occupied industrial point in which is available one or several sources of the pollution which arrangement is determined by coordinates *x, y, z*. For calculation of impurity's concentration average from a dot source used the solution semi-empirical equation by Gaussian function impurity's distribution, received by a method of function of Green. Further the normalization of task's key parameters is carried out, basic data are defined. By means of the received equation the model of an quantity's assessment of the aerosol polluting substances arriving from a source with final and continuous duration of action is made. Thus, the considered settlement and analytical model of a technique of an concentration's assessment of impurity is applicable to applied problems of expeditious control of the industrial region's condition.

Keywords: concentration of impurity, Gauss function , equation of turbulent diffusion

Развитие энергетики, машиностроения, химии, транспорта в XX в. привело к тому, что человеческая деятельность стала сравнима по масштабам с естественными энергетическими и материальными процессами, происходящими в биосфере. Антропогенные воздействия приводят к нарушению практически всех природных биогеохимических циклов, в том числе включающих в себя тяжелые металлы. В настоящее время все крупные промышленные центры нуждаются в постоянном контроле выбросов, совершаемыми как стационарными, так и передвижными источниками загрязнения. Для моделирования мониторинга экологического состояния промышленного региона необходима адекватная математическая модель, следуя которой возможно не только рассчитать концентрацию загрязняющих веществ, но и строить прогноз концентраций на ближайшие периоды времени. Рассматриваемое диффузионное уравнение является одной из качественных и адекватных математических моделей для решения поставленной задачи. [1]

Пусть $q(P, t)$ – функция, значение которой в момент времени t в точке $P(x, y, z)$ совпадает со значениями мгновенной концентрации примеси, переносимой в атмосфере потоками воздуха. Предполагается, что функция $q(P, t)$ непрерывно дифференцируема по x, y, z, t. Полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии записывают в виде [3]:

$$\frac{\partial q}{\partial t}+V_x\frac{\partial q}{\partial x}+V_y\frac{\partial q}{\partial y}+V_z\frac{\partial q}{\partial z}= \\ =\frac{\partial}{\partial x}\cdot K_x\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}K_y\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}K_z\frac{\partial q}{\partial z}+S, \quad (1)$$

где S – источник примеси, находящийся в точке P_0 (x_0, y_0, z_0) и производящий мгновенный выброс загрязняющих примесей в момент времени t_0 в количестве Q_0.

Для расчета средних концентраций примеси в пограничном слое атмосферы от мгновенного точечного источника используется решение уравнения (1):

$$q(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{Q(x_0, y_0, z_0, t_0)}{[K_x K_y K_z]^{1/2}\left[4\pi(t-t_0)\right]^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{\frac{[(x-x_0)-V_x(t-t_0)]^2}{4K_x(t-t_0)}\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{[(y-y_0)-V_y(t-t_0)]^2}{4K_y(t-t_0)}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{[(z-z_0)-z(t-t_0)]^2}{4K_z(t-t_0)}\right\}, \qquad (2)$$

называемое гауссовой функцией распределения концентрации примеси. Решение (2) получено методом функции Грина. Для расчета концентрации аэрозолей в пункте наблюдения необходимо, прежде всего, определить и задать значения исходных данных и провести нормировку основных параметров и параметризацию задачи. Исходными данными для уравнения (2) будут:

а) момент времени, когда источник производит выброс загрязняющих веществ (ЗВ) – t_0;

б) координаты источника P_0 (x_0, y_0, z_0) (м);

в) расстояние от источника до пункта наблюдения R (м) – расстояние от точки P_0 – источника выбросов загрязняющих веществ до точки P – пункта наблюдения.

г) Q_0 (10^{-3} кг/с) – количество загрязняющих веществ, выброшенное источником в начальный момент времени t_0;

д) турбулентность атмосферы в пограничном слое, характеризуемая коэффициентом турбулентной диффузии $K = \{K_x, K_y, K_z\}$ (м^2/с);

е) скорость ветра $V = \{V_x, V_y, V_z\}$ (м/с).

Помимо исходных данных необходимо также вычислить следующие параметры задачи: координаты пункта наблюдения P, в котором проводятся замеры концентрации загрязняющих веществ, поступающих от источника:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}R; \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}R. \qquad (3)$$

Далее проводим нормирование переменных задачи. Положим, что

$$q(P_0, P, t_0, t) = Q_0 \cdot \tilde{q}(P_0, P, t_0, t), \qquad (4)$$

где

$$\tilde{q}(P_0, P, t_0, t) = \hat{q} \cdot \hat{q}\left(\hat{P}_0, \hat{P}, \hat{V}, \hat{K}, \hat{t}_0, \hat{t}\right), \qquad (5)$$

$\hat{q}$, $\hat{P}_0$, $\hat{P}$, $\hat{V}$, $\hat{K}$, $\hat{t}_0$, $\hat{t}$ – нормированные величины, принимающие значения в интервале (0,1). Пронормируем переменные и распределения задачи следующим образом: $\hat{P}_0(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0)$, где $\hat{x}_0 = \frac{x_0}{R}$; $\hat{y}_0 = \frac{y_0}{R}$; $\hat{z}_0 = \frac{z_0}{R}$. Аналогично получаем $\hat{P}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, где $\hat{x} = \frac{x}{R}$; $\hat{y} = \frac{y}{R}$; $\hat{z} = \frac{z}{R}$. Коэффициенты турбулентной диффузии и скорости ветра пронормируем как обычно:

$$\hat{K} = \left\{\hat{K}_x, \hat{K}_y, \hat{K}_z\right\}; \hat{K}_x = \frac{K_x}{K^*};$$
$$\hat{K}_y = \frac{K_y}{K^*}; \hat{K}_z = \frac{K_z}{K^*}, \qquad (6)$$

где $K^* = \max\{K_x, K_y, K_z\}$;

$$\hat{V} = \left\{\hat{V}_x, \hat{V}_y, \hat{V}_z\right\}; \quad \hat{V}_x = \frac{V_x}{V^*};$$
$$\hat{V}_y = \frac{V_y}{V^*}; \quad \hat{V}_z = \frac{V_z}{V^*}, \qquad (7)$$

где $V^* = \max\{V_x, V_y, V_z\}$.

Далее нормируем переменные

$$\hat{t}_1 = \frac{t_1}{T}; \hat{t}_0 = \frac{t_0}{T}; \hat{t}_2 = \frac{t_2}{T},$$
$$\hat{t}_1 \le \hat{t} \le \hat{t}_2; \qquad (8)$$

$T = t^* - t_0$ – временной интервал, в течение которого в пункт наблюдения будут поступать загрязнения.

С учетом вышеизложенного уравнение (5) можно записать таким образом:

$$\hat{q}\left(\hat{P}_0, \hat{P}, \hat{V}, \hat{K}, \hat{t}_0, \hat{t}\right) = \frac{1}{\left[4\pi\left(\hat{t}-\hat{t}_0\right)\right]^{3/2}\left[\hat{K}_x, \hat{K}_y, \hat{K}_z\right]^{1/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{\left[(\hat{z}-\hat{z}_0)-\hat{V}_z\left(\hat{t}-\hat{t}_0\right)\right]^2}{4\hat{K}_z\left(\hat{t}-\hat{t}_0\right)}\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{\left[(\hat{x}-\hat{x}_0)-\hat{V}_x\left(\hat{t}-\hat{t}_0\right)\right]^2}{4\hat{K}_x\left(\hat{t}-\hat{t}_0\right)}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\left[(\hat{y}-\hat{y}_0)\hat{V}_y(\hat{t}-\hat{t}_0)\right]^2}{4\hat{K}_y\left(\hat{t}-\hat{t}_0\right)}\right\}. \qquad (9)$$

Рассмотрим случай, когда в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ работает источник в течение конечного промежутка времени $[\zeta, \zeta_0 + T]$ и в точке наблюдения $P(x, y, z)$ происходит процесс накопления загрязняющих веществ. Предполагается, что в пункте наблюдения ведутся замеры (прием) концентрации поступивших примесей от источников в моменты времени $t \in [t_1, t_2]$. Функция $S(P_0, \zeta)$ имеет смысл интенсивности источника, при этом функция $S(P_0, \zeta)\Delta\zeta$ (10^{-3} кг/м^3) определяет количество вещества, выброшенного в атмосферу за элементарный интервал времени $\Delta\zeta$ в окрестности ζ. Согласно рассмотренной теории, импульс возмущения загрязняющих веществ $S(P_0, \zeta)$ будет приниматься в точке P в интервале $[t_\zeta^* - \tau_1, t_\zeta^* + \tau_2]$. В силу этого начальное возмущение $S(P_0, \zeta)$ будет приниматься в точке P во время $(t_0^* - \tau_1, t_0^* + \tau_2)$, а последнее – во время $(t_T^* - \tau_1, t_T^* + \tau_2)$. Объединение этих интервалов дает интервал $(t_0^* - \tau_1, t_T^* + \tau_2)$. Таким образом, становится видно, что интервал $[\zeta, \zeta_0 + T]$ соответствует интервалу $(t_0^* - \tau_1, t_T^* + \tau_2)$. Моменты времени ζ и t_ζ^* связаны простым преобразованием:

$$t_\zeta^* = t^* + \zeta, \tag{10}$$

и, следовательно, интервал $[\zeta, \zeta_0 + T]$ соответствует интервалу

$$\zeta_0 + t^* - \tau_1 \le t \le \zeta_0 + T + t^* + \tau_2.$$

В итоге имеем:

$$\zeta_0 + t^* - \tau_1 \le t \le \zeta_0 + T + t^* + \tau_2. \tag{11}$$

Неравенство (11) определяет время возможного приема импульса возмущения загрязняющих веществ или, иными словами, время прохождения импульса возмущения загрязняющих веществ через точку P – пункт наблюдения.

Теперь нужно построить интегральную форму $Q(P_0, P, t)$, определяющую количество загрязняющих веществ, накопившееся за время работы источника в точке P. Для этого выберем на интервале $[\zeta, \zeta_0 + T]$ точку ζ_k и интервал $\Delta\zeta_k$ следующим образом:

$$\zeta_k = \zeta_0 + k\Delta\zeta, \tag{12}$$

где $k = \overline{0, m}$ и $\Delta\zeta_k = \zeta_{k+1} - \zeta_k$.

Введем в рассмотрение точку $\zeta_k' = \dfrac{\zeta_k + \zeta_{k+1}}{2}$ и примем в точке P_0 выброс:

$$Q(P_0, \zeta_k') = S(P_0, \zeta_k')\Delta\zeta_k. \tag{13}$$

Тогда в точке P реакция будет следующей: [3]

$$Q(P, t) = Q(P_0, \zeta_k')\tilde{q}(P_0, P, \zeta_k', t). \tag{14}$$

В итоге можно записать:

$$Q(P_0, P, t) = \sum_{k=0}^{m(t)} Q(P_0, \zeta_k')\tilde{q}(P_0, P, \zeta_k', t). \tag{15}$$

Это интегральная сумма, остается перейти к пределу при $\Delta\zeta \to 0$ и сделать замену $m(t) \to \zeta(t)$, получим:

$$Q(P_0, P, t) = \int_{\zeta_0}^{\zeta(t)} S(P_0, \zeta)\tilde{q}(P_0, P, \zeta, t)d\zeta, \tag{16}$$

где $\zeta_0 \le \zeta < \zeta 0 + T$,

$$\zeta_0 + t^* - \tau_1 \le t \le \zeta_0 + T + t^* + \tau_2$$

или $t_1 \le t \le t_2$, если принять

$$t_1 = \zeta_0 + t^* - \tau_1;$$

$$t_2 = \zeta_0 + T + t^* + \tau_2; \ \zeta(t) = t - t^*. \tag{17}$$

Далее рассмотрим вариант, когда источник работает непрерывно, а в точке P фиксируется количество загрязняющих веществ в течении определенного промежутка времени $[t_1, t_2]$. Необходимо определить

$$\bar{Q}(P_0, P) = \frac{1}{(t_2 - t_1)}\int_{t_1}^{t_2} Q(P_0, P, t)dt. \tag{18}$$

Выражение (18) задает усредненное значение концентрации загрязняющих веществ, приходящееся на один кубический метр и накопившееся за время $[t_1, t_2]$. В данном случае интервал $[t_1, t_2]$ задан и требуется определить соответствующий ему интервал $[\zeta_1, \zeta_2]$. Согласно (13) $t_1 = \zeta_0 + t^* - \tau_1$, $t_2 = \zeta_0 + T + t^* + \tau_2$. Отсюда находим $\zeta_0 = t_1 + \tau_1 - t^*$ и $\zeta_0 + T = t_2 - t^* - \tau_2$. Обозначим $\zeta_1 = \zeta_0$ и $\zeta_2 = \zeta_0 + T$. В результате получаем $\zeta_1 = t_1 + \tau_1 - t^*$ и $\zeta_2 = t_2 - t^* - \tau_2$. В итоге имеем следующие расчетные формулы:

$$\bar{Q}(P_0, P, t_1, t_2) = \frac{1}{(t_2 - t_1)}\int_{t_1}^{t_2} Q(P_0, P, t)dt, \tag{19}$$

$$Q(P_0, P, t) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2(t)} S(P_0, \zeta)\tilde{q}(P_0, P, \zeta, t)d\zeta \tag{20}$$

$$\zeta_1 = t_1 + \tau_1 - t^*;$$

$$\zeta_2 = t_2 - t^* - \tau_2; \ t_1 \le t \le t_2. \tag{21}$$

Проведем расчет концентрации примесей, поступающих в точку наблюдения от источника согласно методике (16), (18). Для этого необходимо, прежде всего, задать исходные данные и провести нормировку основных переменных и полей задачи. Затем необходимо вычислить прихода P – максимума загрязняющих веществ, поступающих от источника. Затем задаем разбиение отрезка $[t_1,\ t_2]$ и формируем массив $\{t_l\}$, $l=\overline{1,n},\ t_{l+1}=t_l+hl$; $h=\dfrac{(t_2-t_1)}{n}$ [4]. После нормирования переменных $\hat{t}_1=\dfrac{t_1}{T-t_0}$; $\hat{t}^*=\dfrac{t^*}{T-t_0}$; $\hat{t}_0=\dfrac{t_0}{T-t_0}$; $\hat{t}_2=\dfrac{t_2}{T-t_0}$; $\hat{t}_0\le\hat{\zeta}\le\hat{t}-\hat{t}^*$; $\hat{\zeta}=\dfrac{\zeta}{T-t_0}$; $d\zeta=(T\quad -t_0)$, $d\zeta=(T-t_0)d\hat{\zeta}$ можно записать:

$$q(\hat{P},\hat{\zeta},\hat{t})=\frac{1}{\left[4\pi\left(\hat{t}-\hat{\zeta}\right)\right]^{3/2}\left[\hat{K}_x,\hat{K}_y,\hat{K}_z\right]^{1/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{\left[\left(\hat{z}-\hat{z}_0\right)-\hat{V}_z\left(\hat{t}-\hat{\zeta}\right)\right]^2}{4\hat{K}_z\left(\hat{t}-\hat{\zeta}\right)}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\left[\left(\hat{x}-\hat{x}_0\right)-\hat{V}_x\left(\hat{t}-\hat{\zeta}\right)\right]^2}{4\hat{K}_x\left(\hat{t}-\hat{\zeta}\right)}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{\left[\left(\hat{y}-\hat{y}_0\right)-\hat{V}_y\left(\hat{t}-\hat{\zeta}\right)\right]^2}{4\hat{K}_y\left(\hat{t}-\hat{\zeta}\right)}\right\}. \qquad (22)$$

Далее рассмотрим функцию источника. Допустим, что

$$S\left(P_0,\zeta\right)=S_0\hat{S}\left(\hat{P}_0,\hat{\zeta}\right)=S_0\cdot\eta(\hat{x}_0,y_0,\hat{z}_0,\hat{\zeta}); \qquad (23)$$

$$\eta(\hat{x}_0,\hat{y}_0,\hat{z}_0,\hat{\zeta})=\left(1+a\cdot\sin(b\cdot\hat{x}_0+c)\right)\cdot\left(1+a\cdot\sin(b\cdot\hat{y}_0+c)\right)\times$$
$$\times\left(1+a\cdot\sin(b\cdot\hat{z}_0+c)\right)\cdot\left(1+a\cdot\sin(b\cdot\hat{\zeta}+c)\right).$$

В итоге имеем [3]:

$$Q\left(P,t\right)=\hat{Q}^*\left(P,t\right)\cdot\hat{\hat{Q}}\left(\hat{P},\hat{t}\right); \qquad (24)$$

$$\hat{\hat{Q}}\left(\hat{P},\hat{t}\right)=\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}-\hat{t}^*}\hat{S}\left(\hat{P}_0,\hat{\zeta}\right)\hat{q}\left(\hat{P}_0,\hat{P},\hat{t},\hat{\zeta},\hat{V},\hat{K}\right)d\hat{\zeta}; \qquad (25)$$

$$\hat{Q}^*=T\cdot S_0\cdot q^*;\quad S_0=Q_0. \qquad (26)$$

Таким образом, показана возможность практического применения разработанной расчетно-аналитической методики оценки концентрации загрязняющих веществ к прикладным задачам оперативного контроля состояния промышленного региона, что позволяет осуществить его экологический прогноз [1]. Таким образом, показана возможность практического применения разработанной расчетно-аналитической методики оценки концентрации загрязняющих веществ к прикладным задачам оперативного контроля состояния промышленного региона, что позволяет осуществить его экологический прогноз.

Список литературы

1. Безуглая Э.Ю. Мониторинг состояния загрязнения атмосферы в городах. – Л.: Гидрометеоиздат, 1986. – 200 с.

2. Макухин В.Л., Потемкин В.Л. Моделирование переноса и трансформации загрязняющих примесей. – Иркутск, 2012. – С. 286.

3. Наац В.И., Наац И.Э. Математические модели и численные методы в задачах экологического мониторинга атмосферы. – М.: Физматлит 2010. – Т. 4. – С. 101–117.

4. Наац В.И., Наац И.Э., Рыскаленко Р.А. Параметризированные модели теории переноса в задачах экологического мониторинга атмосферы и принцип минимакса. – Ставрополь: Ставропольский государственный университет, 2009. – № 2. – С. 132–133.

5. Койшыбаев Н.А. Оценка влияния физических и химических процессов на озоновый слой Земли, а также изменение состояния озонового слоя – отчет о НИР / Республиканское государственное предприятие Казахский научно-исследовательский институт экологии и климата (КазНИИЭК). – Алматы, 2006. – 133 с.

References

1. Bezuglaya E.U. Monitoring of a state pollution the atmosphere in the cities. Leningrad, Gitrometeoizdat, 1986. 200 p.

2. Makukhin V.L., Potemkin V.L. Modeling of transfer and transformation polluting impurity. Irkutsk, Russia 2012. P. 286.

3. Naatz V.I., Naatz E.I. Mathematical models and numerical methods in problems of environmental monitoring the atmosphere. Moscow 2010. P. 101–117.

4. Naatz V.I., Naatz E.I., Ryskalenko R.A. The parameterized models of the theory transfer in problems environmental monitoring the atmosphere and the principle of a minimax. the Stavropol state university, Stavropol 2009. P. 132–133.

5. Koishybayev N.A. Assessment of influence physical and chemical processes on an ozone layer of Earth, and also change a condition an ozone layer. Republican state enterprise Kazakh research institute of ecology and climate. Almaty, 2006. P. 133.

Рецензенты:

Джомартова Ш.А., д.т.н., профессор, кафедра «Информационные системы», механико-математический факультет, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы;

Дауылбаев М.К., д.ф.-м.н., кафедра дифференциальных уравнений и теории управления, механико-математический факультет, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы.

Работа поступила в редакцию 17.01.2014.